

УДК 622.6

Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Почка К. І.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У РОБОЧИХ ОРГАНАХ ПІДЙОМНИХ УСТАНОВОК МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Постановка проблеми. Сучасний рівень розвитку технології видобутку й переробки корисних копалин обумовлює широке застосування у гірничій промисловості протяжних транспортних пристроїв, характерною особливістю яких є та, що один із розмірів суттєво перевищує інші. До таких пристроїв відносять шахтні підйомні механізми. Правильне врахування динамічних процесів, які протікають у зазначених об'єктах, є одним із основних факторів, що визначають працездатність, надійність і економічність конструкції. Оскільки всебічний розгляд цих процесів практично неможливий, для наближеного їх опису зазвичай використовуються розрахункові моделі.

При розрахунковому моделюванні динамічних процесів у протяжних транспортних пристроях широко використовуються моделі, основним елементом яких є пружний прямолінійний стрижень. Зрозуміло, що такі моделі не можуть відобразити всі особливості прототипу. Однак, зазвичай вони дозволяють виявити найбільш суттєві сторони явища, уникнути накладань ефектів різної фізичної природи.

У даній роботі на основі стрижневих моделей розглянуті динамічні процеси у робочих гілках підйомних установок з урахуванням особливостей їх роботи – змінністю довжини канату при підйомі вантажу.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Переважна більшість досліджень динаміки (шахтних) підйомних канатів базується на рівняннях поздовжніх коливань пружного стрижня.

Розмаїття моделей, що використовуються для динамічного розрахунку (шахтних) підйомних установок, можна розділити на дві групи. До першої відносяться розрахункові моделі, протяжні елементи яких мають фіксовану, наперед задану довжину. Вони досить вдало описують більшість розрахункових режимів роботи (шахтних) канатів у момент пуску і гальмування підйомної установки. Такі механічні системи успішно розв'язуються класичним методом математичної фізики – методом розділення змінних. Можна зазначити, що найбільш актуальні задачі динаміки подібних систем вирішені. До другої групи відносяться розрахункові моделі, протяжні елементи яких мають змінну довжину. Перші спроби розгляду шахтних канатів як систем змінної довжини були зроблені у кінці 20-х років ХХ століття О. С. Локшиним, хоча прийняті ним розрахункові схеми виявились фізично недостатньо коректними [1].

Зараз при розв'язуванні задач динаміки ниток змінної довжини переважний розвиток отримали аналітичні методи, серед яких слід відзначити перш за все методи хвиль, що розповсюджуються, та інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними у часі ядрами та межами інтегрування [2, 3]. На можливість розв'язку задач динаміки канату змінної довжини методом хвиль, що розповсюджуються, вперше вказав М.П. Неронов [4].

Рух нитки змінної довжини за допомогою інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними у часі параметрами описаний у монографіях [5, 6]. Для наближеного розв'язку отриманих рівнянь використані асимптотичні методи нелінійної механіки. Складність вказаних аналітичних методів створює труднощі щодо їх застосування у інженерній практиці, а степінь розробки цих методів ще недостатній для успішної їх формалізації на ПЕОМ.

Одним з перспективних шляхів розв'язку задач динаміки нитки змінної довжини є використання інтегро-диференціальних співвідношень [1], які дозволяють інтегрувати рівняння руху об'єкту змінної довжини шляхом зведення до розв'язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, та який у чисельній формі може бути успішно отриманий за допомогою ПЕОМ [7, 8].

Результати цитованих вище робіт будуть використані у даному дослідженні.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних кінематично-силових параметрів руху робочих органів підйомних установок методами математичної фізики [9].

Виклад основного матеріалу дослідження.

У монографії [6] сформульовані дві основні задачі динаміки одновимірних неперервних систем змінної довжини. Перша основна задача полягає у визначенні закону руху об'єкта за заданою швидкістю зміни його довжини, друга – у визначенні руху системи при заданому значенні силового фактору, який викликає зміни довжини системи.

Принципова різниця між цими задачами полягає у тому, що у першому випадку довжина об'єкта у кожний поточний момент часу відома, тоді як у другому закон зміни довжини у часі слід визначити. Тому друга основна задача є суттєво складнішою за першу.

Визначення закону руху вантажу у підйомній установці є предметом другої основної задачі, оскільки у реальних об'єктах зазвичай відомий закон зміни зусилля, яке призводить до руху механічної системи.

1. Рівняння руху гілки неврівноваженої підйомної установки. Модель Червоненка-Роздольського-Заболотного [1].

Розглянемо розрахункову схему робочої гілки неврівноваженої підйомної установки (модель Червоненка-Роздольського-Заболотного [1] (ЧРЗ)) за деяких спрощень, що дозволяють проінтегрувати відповідну до моделі ЧРЗ систему диференціальних рівнянь аналітичним шляхом, використовуючи підходи [9].

Розглянемо систему, утворену пружною ниткою, на нижньому кінці якої знаходиться зосереджена маса. Підйом вантажу (наприклад, вантажопідйомним механізмом) здійснюється намотуванням нитки/кантату на барабан (рис. 1). Приведена система слугує розрахунковою моделлю гілки неврівноваженої підйомної установки.

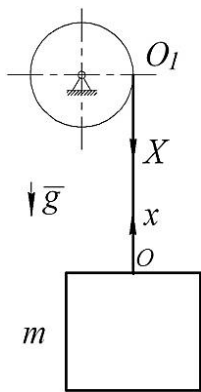


Рис. 1. Розрахункова схема робочої гілки неврівноваженої підйомної установки

Введемо дві координати системи: нерухомі ейлереві (просторові) координати X та рухомі лагранжові (матеріальні) координати x , зв'язані з канатом. Початок координатної вісі X обираємо у точці набігання канату на барабан і спрямуємо її у бік вантажу. Лагранжові координати будемо відраховувати від точки прикладання вантажу у бік барабана.

Поздовжні переміщення поперечного перерізу з лагранжовою координатою x у момент часу t відносно нерухомого простору описуються виразом $u(x, t)$. Додатній напрямок переміщень співпадає з напрямком вісі Ox .

Положення довільного перерізу канату у нерухомій системі координат визначається залежністю:

$$X(x, t) = X_0(t) - x - u(x, t), \quad (1)$$

де $X_0(t)$ – залежність від часу ейлереві координати точки прикладання вантажу, тобто траєкторія її руху у нерухомій системі відліку. Прискорення елемента канату:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{d^2 X_0}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Рівняння руху елемента, складене у відповідності з принципом Даламбера, приймає вигляд:

$$E \cdot S \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \cdot \left(g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{d^2 X_0}{dt^2} \right), \quad (3)$$

де E – модуль пружності (Юнга) матеріалу канату, Па; S – площа поперечного перерізу канату, m^2 ; ρ – лінійна щільність матеріалу канату, $\frac{kg}{m}$; g – прискорення вільного падіння ($g = 9,81 \frac{m}{c^2}$); t – час, c ; $[u] = [X_0] = m$.

У результаті скорочення обох частин рівності (3) на величину ρ матимемо неоднорідне хвильове рівняння відносно переміщень:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X_0}{dt^2} - g, \quad a^2 = \frac{E \cdot S}{\rho}. \quad (4)$$

У (4) $a = \sqrt{\frac{E \cdot S}{\rho}}$ – швидкість розповсюдження у канаті поздовжніх хвиль, $\frac{m}{c}$.

У праву частину цього рівняння (4) входить прискорення вантажу $\frac{d^2 X_0}{dt^2}$, яке саме по собі є невідомою функцією часу t . Однак, здійснюючи заміну змінних, за формулою:

$$U(x, t) = X_0(t) - u(x, t), \quad (5)$$

де $U(x, t)$ – нова залежна змінна, рівняння руху канату (4) набуває форми неоднорідного хвильового рівняння з постійною правою частиною:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = g. \quad (6)$$

Нова залежна змінна має дещо штучний фізичний зміст: якщо б точка прикладання вантажу рухалась, відповідаючи тому ж закону, що й переріз x , тоді положення вантажу у довільний момент часу t описувалося б виразом $U(x, t)$. Зрозуміло, що у точці прикладання вантажу має місце рівність:

$$U(0, t) = X_0(t). \quad (7)$$

Сформулюємо граничні умови задачі. У лагранжовій системі координат при підйомі вантажу значення координати точки його прикладання залишається незмінним: $x = 0$. У той самий час внаслідок зміни довжини канату змінюється лагранжова координата точки набігання канату на барабан. Будемо вважати, що положення цієї точки описується залежністю:

$$x = L(t), \quad (8)$$

де $L(t)$ – невідома функція часу. У початковий момент часу $L(0) = l$ (l – первісна довжина канату у недеформованому стані). Величина $L(t)$ представляє собою довжину, що має у недеформованому стані ділянка канату, розміщена у момент часу t між точкою прикладання вантажу і точкою набігання канату на барабан. Тому різниця $X_0(t) - L(t)$ дорівнює видовженню канату у цей момент часу.

Припустимо, що вантаж має вагу Q . Тоді у точці його прикладання має місце рівність:

$$E \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = Q - \frac{Q}{g} \cdot \left(\frac{d^2 X_0}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \quad (9)$$

Переходячи до нової залежної змінної $U(x, t)$, матимемо граничну умову у нижньому перерізі гілки:

$$x = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{m} \cdot \left(\frac{d^2 X_0}{dt^2} - g \right), \quad (10)$$

де \tilde{m} – константа, що визначається масою кінцевого вантажу: $\tilde{m} = \frac{Q}{(E \cdot S \cdot g)}$,
 $[\tilde{m}] = \frac{c^2}{m}$.

Будемо вважати, що у точці набігання на барабан до канату прикладена сила, величина якої є відомою функцією часу. Тоді граничну умову у верхньому перерізі канату можна подати у виді:

$$x = L(t); \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -f(t), \quad (11)$$

де $f(t)$ – функція, що дорівнює відношенню величини питомої прикладеної сили (на одиницю довжини канату) до поздовжньої жорсткості канату, тобто безрозмірна величина.

У початковий момент часу розглядувана система знаходиться у стані статичної рівноваги. Переміщення перерізі канату описується диференціальним рівнянням рівноваги:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{g}{a^2} \quad (12)$$

і повинно задовольняти граничним умовам:

$$u(x, t)|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \tilde{m} \cdot g. \quad (13)$$

Перша з цих умов (13) є наслідком прийнятої системи відліку переміщень, друга встановлює рівність між внутрішнім зусиллям у нижньому перерізі канату та вагою вантажу (Q). Наведеному диференціальному рівнянню (12) та граничним умовам (13) задовольняє вираз переміщення:

$$u(x, t) = \tilde{m} \cdot g \cdot x + \frac{g}{2 \cdot a^2} \cdot x^2. \quad (14)$$

Відлік переміщень ведеться у рухомій системі координат, що пов'язана з точкою прикладання вантажу. При деформації канату під дією ваги вантажу та власної ваги відбувається опускання нижнього перерізу. Внаслідок цього верхній переріз отримує додатне переміщення відносно початку координат, що дорівнює видовженню канату:

$$u(l, 0) = \tilde{m} \cdot g \cdot l + \frac{g}{2 \cdot a^2} \cdot l^2. \quad (15)$$

Тому початкове значення ейлерової координати точки прикладання вантажу:

$$X_0(0) = l + \tilde{m} \cdot g \cdot l + \frac{g}{2 \cdot a^2} \cdot l^2. \quad (16)$$

Вираз залежної змінної $U(x, t)$ у початковий момент часу згідно виразу (15) має вид:

$$U(x, 0) = l - \tilde{m} \cdot g \cdot (x - l) - \frac{g}{2 \cdot a^2} \cdot (x^2 - l^2). \quad (17)$$

Диференціюючи вираз для переміщень у точці $x = l$, впевнюємось у тому, що зусилля у верхньому перерізі дорівнює сумарній вазі вантажу і канату. Воно також повинно дорівнювати початковому значенню прикладеної сили, звідки:

$$f(0) = \frac{\partial u(l, 0)}{\partial x} = g \cdot \left(\tilde{m} + \frac{l^2}{a^2} \right). \quad (18)$$

Початкова швидкість канату з вантажем дорівнює нулю, внаслідок чого виконуються наступні початкові умови:

$$\frac{dX_0(0)}{dt} = 0; \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Визначення закону руху розглядуваної механічної системи зводиться до інтегрування хвильового рівняння (6) за граничних умов (10) та (11) і початкових умов (16)-(19).

Для визначення $X_0(t)$ та $L(t)$ у [11] наведена наступна система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} [1 + f(t)] \cdot \frac{dL(t)}{dt} - \frac{g}{a} \cdot L(t) = -\tilde{m} \cdot a \cdot \frac{d^2 X_0(t - x/a)}{dt^2} + \frac{dX_0(t - x/a)}{dt} - a \cdot [f(t) - \tilde{m} \cdot g]; \\ \tilde{m} \cdot a \cdot \frac{d^2 X_0(t + x/a)}{dt^2} + \frac{dX_0(t + x/a)}{dt} = [1 + f(t)] \cdot \frac{dL(t)}{dt} + \frac{g}{a} \cdot L(t) - a \cdot [f(t) - \tilde{m} \cdot g]. \end{cases} \quad (20)$$

У (20) при обчисленні аргументів невідомих функцій $L(t)$ та $X_0(t)$ величина x визначається залежністю (8) як функція незалежної змінної t .

У практичному відношенні визначення названих функцій представляє найбільший інтерес, оскільки саме воно дозволяє встановити відповідність між законом руху вантажу та видовженням канату, з однієї сторони і законом дії прикладеної сили – з іншої.

Характерна особливість системи (20) полягає у тому, що у ній одночасно фігурують значення шуканих функції та їх похідних, що відповідають різним часовим інтервалам. Це дозволяє для інтегрування системи ефективно використовувати процес послідовного продовження розв'язків. У даному сенсі отримані у [1] рівняння (20) утворюють систему з аргументом, що відхиляється.

При розгляді системи (20) на інтервалах часу, що задовольняють умові:

$$t \gg x/a \Rightarrow t \gg L(t)/a, \quad (21)$$

система рівнянь (20) стає простішою:

$$\begin{cases} [1 + f(t)] \cdot \frac{dL}{dt} - \frac{g}{a} \cdot L = -\tilde{m} \cdot a \cdot \frac{d^2 X_0}{dt^2} + \frac{dX_0}{dt} - a \cdot [f(t) - \tilde{m} \cdot g]; \\ \tilde{m} \cdot a \cdot \frac{d^2 X_0}{dt^2} + \frac{dX_0}{dt} = [1 + f(t)] \cdot \frac{dL}{dt} + \frac{g}{a} \cdot L - a \cdot [f(t) - \tilde{m} \cdot g]. \end{cases} \quad (22)$$

У (22) невідомі функції L та X_0 залежать від t .

Шляхом нескладних перетворень систему (22) можна звести до наступної:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{m} \cdot a^2}{g} \cdot [1 + f(t)] \cdot \frac{d^3 X_0}{dt^3} - \frac{dX_0}{dt} + [1 + f(t)] \cdot \frac{a^2}{g} \cdot \frac{df(t)}{dt} = 0; \\ L(t) = \frac{\tilde{m} \cdot a^2}{g} \cdot \frac{d^2 X_0}{dt^2} + \frac{a^2}{g} \cdot [f(t) - \tilde{m} \cdot g]. \end{cases} \quad (23)$$

Зрозуміло, що у (23) спочатку можна розв'язати перше рівняння, а потім знайти $L(t)$ з другого рівняння (23).

Подамо перше рівняння (23) у більш зручній формі (для подальшого його аналітичного інтегрування):

$$\frac{d^3 X_0}{dt^3} - \frac{g}{a^2 \cdot \tilde{m} \cdot [1 + f(t)]} \cdot \frac{dX_0}{dt} + \frac{1}{\tilde{m}} \cdot \frac{df(t)}{dt} = 0. \quad (24)$$

Початкові умови для даного рівняння мають вид:

$$X_0(0) = l + \tilde{m} \cdot g \cdot l + \frac{g}{2 \cdot a^2} \cdot l^2; \quad \frac{dX_0(0)}{dt} = \frac{d^2 X_0(0)}{dt^2} = 0. \quad (25)$$

Будемо вважати, що $f(t)$ змінюється за наступним законом, запропонованим у [1]:

$$f(t) = g \cdot \left(\tilde{m} + \frac{l}{a^2} \right) + k \cdot t. \quad (26)$$

Тоді:

$$\frac{df(t)}{dt} = k. \quad (27)$$

При $k = 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ [1] можна на проміжку часу $0 < t \ll 10 \text{ c}$ знехтувати у другому доданку (24) залежністю $f(t)$ від часу t , тобто подати рівняння (24) у наступному виді:

$$\frac{d^3 X_0}{dt^3} - \frac{g}{a^2 \cdot \tilde{m} \cdot \left[1 + g \cdot \left(\tilde{m} + \frac{l}{a^2} \right) \right]} \cdot \frac{dX_0}{dt} + \frac{k}{\tilde{m}} = 0. \quad (28)$$

Загальний розв'язок (28) за початкових умов (25) можна подати наступним чином:

$$X_0(t) = \left(l + \tilde{m} \cdot g \cdot l + \frac{g}{2 \cdot a^2} \cdot l^2 \right) - \frac{k}{2 \cdot \tilde{m} \cdot \lambda^3} \cdot \exp(\lambda \cdot t) + \frac{k}{2 \cdot \tilde{m} \cdot \lambda^3} \cdot \exp(-\lambda \cdot t) + \frac{k}{\tilde{m} \cdot \lambda^2} \cdot t. \quad (29)$$

Тоді:

$$L(t) = -\frac{k \cdot a^2}{g \cdot \lambda} \cdot \text{sh}(\lambda \cdot t). \quad (30)$$

У (29) та (30) параметр λ має наступний вигляд:

$$\lambda = \left\{ \frac{g}{a^2 \cdot \tilde{m} \cdot \left[1 + g \cdot \left(\tilde{m} + \frac{l}{a^2} \right) \right]} \right\}^{1/2}. \quad (31)$$

Розв'язок (6) має вид:

$$U(x, t) = X_0(t) - \tilde{m} \cdot g \cdot x + \frac{g}{2 \cdot a^2} \cdot x^2. \quad (32)$$

2. Рівняння руху гілки неврівноваженої підйомної установки. Модель Неронова-Ішлінського.

У роботах [2–4] наведене інтегродиференціальне співвідношення теорії пружного канату змінної довжини та відповідне диференціальне рівняння, що описує поздовжній рух у подібних механічних системах.

Так, основне інтегродиференціальне співвідношення має вид:

$$\left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot l \cdot \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} + \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot l \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x \partial t} - \rho \cdot S \cdot \int_0^l (l-x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx + E \cdot S \cdot u(l, t) = \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot l \cdot \frac{dV}{dt} + \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot l \cdot g, \quad (33)$$

де m – маса вантажу, підвішеного на канті; S – площа поперечного перерізу канату; ρ – маса одиниці об'єму канату, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $l = l(t)$ – природна довжина канату (залежить від часу t), тобто довжина канату між барабаном і вантажем у ненацягнутому стані; $u(x, t)$ – пружне переміщення точок канату постійної довжини від положення рівноваги; $V(t)$ – колова (колова) швидкість руху барабана.

Координата (поздовжня) x відраховується вгору від точки закріплення вантажу. Між $u(x, t)$, $V(t)$ та $l(t)$ існує співвідношення:

а) точне –

$$\left[1 + \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}\right] \cdot \frac{dl}{dt} = -V(t); \quad (34)$$

б) наближене (при $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \ll 1$) –

$$\frac{dl}{dt} = -V(t). \quad (35)$$

Розшуковуючи розв'язок $u(x, t)$ у вигляді $u(x, t) = x \cdot \varphi(t)$, для $\varphi(t)$ з (33) можна отримати наступне лінійне диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + E \cdot S \cdot \varphi = \\ = \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot \frac{dV}{dt} + \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l\right) \cdot g. \end{aligned} \quad (36)$$

Права частина (36) враховує середнє видовження канату під дією власної ваги.

Розглянемо частинні випадки рівняння (36).

1. $l = \text{const}$, $V = 0$, тобто канат має незмінну у часі t довжину: $l = l_0$. Тоді вираз (36) набуває виду:

$$\left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot l_0 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g \cdot (-1) + E \cdot S \cdot \varphi = 0. \quad (37)$$

За нульових початкових умов ($\varphi_0 = \frac{d\varphi_0}{dt} = 0$) з (37) можна отримати [9] наступний розв'язок:

$$\varphi(t) = \frac{\left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g}{\left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot l_0 \cdot \Omega^2} \cdot [1 - \cos \Omega \cdot t]; \quad \Omega = \left\{ \frac{E \cdot S}{\left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot l_0} \right\}^{1/2}. \quad (38)$$

Тобто для $u(x, t)$ маємо:

$$u(x, t) = \frac{2 \cdot \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g \cdot x}{\left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot l_0 \cdot \Omega^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega \cdot t}{2}\right). \quad (39)$$

2. $\rho = 0$, тоді (36) набуває вигляду рівняння М. П. Неронова [4]:

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + E \cdot S \cdot \varphi = m \cdot \frac{dV}{dt} + m \cdot g. \quad (40)$$

Рівняння (40) для довільного $l = l(t)$ вимагає чисельного інтегрування на ПЕОМ. Аналіз розв'язку (39) показує, що при:

$$t = t^* = \frac{\pi \cdot (2 \cdot n + 1)}{\Omega}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

пружне переміщення точок канату постійної довжини l_0 від положення рівноваги набуває максимального значення:

$$u_{\max}(x) = \frac{2 \cdot \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g \cdot x}{\left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot l_0 \cdot \Omega^2}, \quad (42)$$

а у точці контакту канату з барабаном ($x = l_0$):

$$u_{\max}(l_0) = \frac{2 \cdot \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g \cdot l_0}{\left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot l_0 \cdot \Omega^2} = \frac{2 \cdot \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g \cdot l_0}{E \cdot S}. \quad (43)$$

Слід зазначити, що деформація канату $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ у моменти часу (41) теж набуває максимальних значень (у всіх точках канату):

$$\left. \frac{\partial u_{\max}(x, t)}{\partial x} \right|_{t=t^*} = \varepsilon_{\max} = \frac{2 \cdot \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g}{\left(m + \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot l_0 \cdot \Omega^2} = \frac{2 \cdot \left(m + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot l_0\right) \cdot g}{E \cdot S}. \quad (44)$$

У таблицях 1, 2 та 3 наведені значення u_{\max} , ε_{\max} та Ω у моменти часу $t = t^*$ для різних значень маси m вантажу та довжини l_0 канату (при цьому $\rho = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $S = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, а $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$).

Таблиця 1

Значення $\Omega, \text{ с}^{-1}$

$m, \text{ кг}$	$l_0, \text{ м}$					
	10	20	50	100	200	500
10^3	80,88	56,96	35,58	24,67	16,81	9,64
$2 \cdot 10^3$	57,31	40,44	25,42	17,79	12,34	7,39
$5 \cdot 10^3$	36,29	25,64	16,18	11,39	7,99	4,93

Таблиця 2

Значення u_{\max} , мм

m , кг	l_0 , м					
	10	20	50	100	200	500
10^3	3,01	6,10	15,81	33,48	74,44	242,16
$2 \cdot 10^3$	5,99	12,05	30,68	63,22	133,92	390,87
$5 \cdot 10^3$	14,91	29,89	75,29	152,44	312,36	836,98

Таблиця 3

Значення ε_{\max}

m , кг	l_0 , м					
	10	20	50	100	200	500
10^3	$3,01 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-4}$	$3,17 \cdot 10^{-4}$	$3,35 \cdot 10^{-4}$	$3,72 \cdot 10^{-4}$	$4,84 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^3$	$5,99 \cdot 10^{-4}$	$6,03 \cdot 10^{-4}$	$6,14 \cdot 10^{-4}$	$6,32 \cdot 10^{-4}$	$6,70 \cdot 10^{-4}$	$7,82 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^3$	$14,91 \cdot 10^{-4}$	$14,95 \cdot 10^{-4}$	$15,06 \cdot 10^{-4}$	$15,24 \cdot 10^{-4}$	$15,62 \cdot 10^{-4}$	$16,74 \cdot 10^{-4}$

ВИСНОВКИ

1. Отримані рівняння руху гілки неврівноваженої підйомної установки у межах моделей Червоненка-Роздольського-Заболотного [1] та Неронова-Ішлінського [2–4], а також знайдені їх аналітичні розв'язки.

2. Визначені переміщення канату та його деформації у випадку моделі Неронова-Ішлінського для канату постійної довжини.

3. Результати даного дослідження можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку гілок неврівноважених підйомних установок як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації, а також для оптимізації (мінімізації) деформацій канату у перехідних процесах (пуску/гальмування) подібних механічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Червоненко А. Г. Динамика протяжённных горных транспортных машин. / А. Г. Червоненко, А. Г. Раздольский, Ю. В. Заболотный. – Киев : Наукова думка, 1983. – 192 с.
2. Ишлинский А. Ю. Об одном интегродифференциальном соотношении в теории упругой нити (каната) переменной длины. / А. Ю. Ишлинский // Украинский математический журнал АН УССР. – 1953. – Т. 5. – № 4. – С. 370–374.
3. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях продольных движений каната (упругой нити) переменной длины. / А. Ю. Ишлинский // Доклады АН СССР. – 1954. – Т. 95. – № 5. – С. 939–941.
4. Неронов Н. П. Определение напряжений в подъёмных канатах. / Н. П. Неронов. – В кн. : Труды совещания по шахтным подъёмным канатам. – М.; Л. : Изд-во АН СССР, 1944. – С. 53–63.
5. Горошко О. А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. / О. А. Горошко, Г. Н. Савин. – Киев : Наукова думка, 1971. – 224 с.
6. Савин Г. Н. Динамика нити переменной длины (применительно к шахтным подъёмам). / Г. Н. Савин, О. А. Горошко. – Киев : Изд-во АН УССР, 1962. – 332 с.
7. Гаркави Н. Я. Численное решение задачи о движении груза в подъёмной установке. / Н. Я. Гаркави, А. Г. Раздольский // Динамика и прочность тяжёлых машин. – 1979. – Вып. 4. – С. 46–54.
8. Раздольский А. Г. О движении нити переменной длины, несущей сосредоточенную массу. / А. Г. Раздольский // Динамика и прочность тяжёлых машин. – 1976. – Вып. 24. – С. 46–51.
9. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики. / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.